埼 玉 新 聞

（第３種郵便物認可）

サイ・テクこらむ 知と技の発信

埼玉大学・理工学研究の現場

【578】

実数と存在定理

佐藤洋平 准教授

実数という言葉は高校の数学の教科書で登場する。それ以降、実数は当然のように受け入れられ数学の多くは実数を用いて表現される。ここでは実数とは何かを改めて考えてみる。高校の教科書には「有理数と無理数を合わせて実数という」とある。では有理数と無理数は何であったか。有理数は(−4)/1や2/11のように整数の分数で表せる数である。整数の分数で表せる数は循環小数でも表せる。例えば、(−4)/1は−3・99999…と表せ9が循環する。2/11は0・181818…と表せ18が循環する。他方、高校の教科書には「循環しない小数を無理数という」とある。例えば2の平方数（2乗して2になる数）$\sqrt{2}$や円周率（円の直径と円周の比）πが無理数である。これらは小数で表すと$\sqrt{2}$＝1・41421356…、π＝3・14159265…となり、小数点以下の数は不規則で循環しない。最近、πの小数点以下の数を100兆桁以上求めたというニュースがあったが、無理数の小数点以下の数を完全に表現しきることは永遠にできない。従って、平方数や円周率のように、ある性質によって定めた数が無理数であることを確かめることはできる（その数が循環小数で表せると仮定して矛盾を導けば良い）が、いきなり循環しない小数を持ってきて、その数が無理数であると主張することはできない。そもそも循環しない小数は完全に表現しきることができないのだから、その数は定まってすらいないのである。実は、大半の無理数は、$\sqrt{2}$やπのような既に記号が割り当てられた数をどのように組み合わせても表現できない。数学ではこのような表現できない数を含む実数の四則演算（足し算・引き算・掛け算・割り算）をどのように定めているのだろうか。高校の教科書は何も説明してない。

では、大学の数学の教科書は実数をどのように説明しているだろうか。微分積分学の教科書では最初に実数の存在とその演算の性質を認めてしまうのが一般的である。つまり「四則演算・順序関係・連続性と呼ばれる三つの性質を満たす集合が実数であり、そのような集合は存在する」と認めてしまう。数学科の講義であれば、デデキントの切断と呼ばれる方法で三つの性質を満たす集合が存在することを確かめることもある。三つの性質の中の連続性はこれまで意識していなかった実数の性質である。この連続性によって高校の教科書では証明がされなかった中間値の定理や平均値の定理を始めとするさまざまな存在定理が証明できるようになる。

さて、研究の話を少しだけする。数学にはさまざまな存在定理がある。私の研究論文も偏微分方程式の解の存在定理が主内容となることが多い。その証明では、解を明示して解の存在を保証するのではなく、解は明示できないが存在することを保証する。そのような保証が可能な理由は、突き詰めれば実数の連続性に基づいている。

さとう・ようへい　1979年生。2007年3月早稲田大学大学院修了。博士（理学）。早稲田大学助手、大阪市立大学数学研究所などを経て、13年10月埼玉大学講師に着任。15年4月から現職。専門は変分法による楕円（だえん）型偏微分方程式の研究。